ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.17 1986
УДК 514.75

ПРИСОЕДИНЕННОЕ РАССЛОЕННОЕ МНОГООБРАЗИЕ АФФИННОЙ СТРУКТУРЫ, ПОРОЖДЕННОЕ ПОЛЕМ ГИПЕРКВАДРИК

В.С.Малаховский

Рассмотрено n-мерное дифференцируемое многообразие, к каждой точке которого присоединено n-мерное аффинное пространство с заданной в нем центральной невырожденной гиперквадрикой. Показано, что такое многообразие является римановым пространством, на котором задано поле квазитензора. Определены поля геометрических объектов, задающих связность и кривизну пространства.

Рассмотрим присоединенное расслоенное многообразие [1], определяемое базовыми формами ϑ^i и формами Пфаффа

$$\begin{aligned} \Delta a_{ij} &= da_{ij} - a_{kj}\omega^k_i - a_{ik}\omega^k + 2a_{ij}a_{hk}c^k\omega^h, \\ \Delta c^i &= dc^i + c^k\omega^i_k + \omega^i, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\omega^j_i\big|_{\vartheta^k=0} = \bar\omega^j_i, \quad \omega^i\big|_{\vartheta^k=0} = \bar\omega^i \tag{2}$$

-инвариантные формы группы G аффинных преобразований n-мерного аффинного пространства. Имеем:

$$d\vartheta^i = \vartheta^k\wedge\vartheta^i_k, \quad d\vartheta^j_i = \vartheta^k_i\wedge\vartheta^j_k + \vartheta^k\wedge\vartheta^j_{ik}, \ \dots \tag{3}$$

$$d\omega^i = \omega^k\wedge\omega^i_k + \vartheta^k\wedge\varphi^i_k, \quad d\omega^j_i = \omega^k_i\wedge\omega^j_k + \vartheta^k\wedge\omega^j_{ik}, \dots \tag{4}$$

причем $\vartheta^j_{ik}, \vartheta^j_{ikh}, \dots, \omega^j_{ik}, \omega^j_{ikh}$ симметричны по любой паре нижних индексов. При фиксации точки x базы M_n уравнения (4) определяют структуру линейной дифференциальной группы G аффинных преобразований, а геометрический объект $\tilde Q = \{a_{ij}, c^k\}$ со структурными формами (1) определяет пространство $\mathcal{K}(Q)$ центральных невырожденных гиперквадрик Q пространства A_n.

В репере $\{A, \vec e_i\}$ аффинного пространства A_n уравнение гиперквадрики Q имеет вид:

$$\mathcal{F} \equiv a_{ij}x^i(x^j - 2c^j) - 1 = 0. \tag{5}$$

Геометрический объект $\{c^i\}$ определяет центр гиперквадрики $Q \in A_n$. Из вида структурных форм (1) оснащающего объекта $\{a_{ij}, c^k\}$ следует, что присоединенное расслоенное многообразие E имеет ступенчатую структуру [2], причем $\dim E = 2n + C^2_{n+1}$. Оно является присоединенным двухъярусным ступенчатым расслоенным пространством [1]. Формы ϑ^i определяют основную базу $M_n = B_0$, а формы $\vartheta^i, \Delta c^j$ -расширенную базу B_1. Слой $F(x_0, c^j_0, a_{hk})$ над фиксированной точкой (x_0, c^j_0) базы B_1 -это C^2_{n+1}-мерное многообразие центральных невырожденных гиперквадрик Q с фиксированным центром $C_0(c^j_0)$. Проекция $\pi_1: E \to B_1$ отображает этот слой в точку (x^i_0, c^j_0), а проекция $\pi: B_1 \to B_0$ отображает расширенную базу на основную, причем $\pi^{-1}(x_0)$ в B_1 образует n-мерное аффинное пространство. Пфаффовы уравнения

$$\Delta c^i = m^i_k\vartheta^k, \quad \Delta a_{ij} = b_{ij,k}\vartheta^k \tag{6}$$

определяют сечение главного расслоения со структурной группой H -стационарной подгруппой гиперквадрики Q. Назовем это многообразие многообразием V^Q_n.

Обозначим

$$c = a_{ij}c^ic^j, \quad \hat c_k = b_{pq,k}c^pc^q + 2a_{pq}m^p_kc^q. \tag{7}$$

Так как гиперквадрика Q не вырождается, то

$$1 + c \neq 0. \tag{8}$$

Рассмотрим системы величин:

$$\hat a_{ij} = \frac{a_{ij}}{1+c}, \tag{9}$$

$$\hat b_{ij,k} = \frac{1}{(1+c)^2}(b_{ij,k} - a_{ij}\hat c_k). \tag{10}$$

Дифференцируя (9) с использованием уравнений (6), получим:

$$\nabla\hat a_{ij} \equiv d\hat a_{ij} - \hat a_{kj}\omega^k_i - \hat a_{ik}\omega^k_j = \hat b_{ij,k}\omega^k. \tag{11}$$

Из формул (9) и (10) следует, что геометрический объект $\{a_{ij}, c^k, b_{pq,h}\}$ подобен геометрическому объекту $\{\hat a_{ij}, c^k, \hat b_{pq,h}\}$. Следовательно, многообразие V^Q_n можно задать системой уравнений

$$\Delta c^i = m^i_k \vartheta^k, \quad \nabla \hat a_{ij} = \hat b_{ij,k}\,\omega^k. \tag{12}$$

Замыкая эту систему, получим

$$\Delta m^i_k \wedge \vartheta^k = 0, \quad \Delta \hat b_{ij,k} \wedge \vartheta^k = 0, \tag{13}$$

где

$$\Delta m^i_k = dm^i_k - m^i_h \vartheta^h_k + m^h_k \omega^i_h + \varphi^i_k + c^h \omega^i_{hk}, \tag{14}$$

$$\Delta \hat b_{ij,k} = d\hat b_{ij,k} - \hat b_{hj,k}\omega^h_i - \hat b_{ih,k}\omega^h_j - \hat b_{ij,h}\vartheta^h_k - \hat a_{hj}\omega^h_{ik} - \hat a_{ih}\omega^h_{jk}. \tag{15}$$

Из (12) следует, что многообразие V^Q_n является n-мерным римановым многообразием, на котором определено поле квазитензора $\{c^i\}$. Обозначим через $\hat a^{ij}$ приведенные миноры матрицы $\|a_{ij}\|$, т.е.

$$\hat a^{ij}\,\hat a_{jk} = \delta^i_k. \tag{16}$$

Объект связности Леви-Чивита $\{\Gamma^k_{ij}\}$ на многообразии V^Q_n задается формулой

$$\Gamma^k_{ij} = \tfrac{1}{2}\hat a^{kh}(\hat b_{hi,j} + \hat b_{hj,i} - \hat b_{ij,h}). \tag{17}$$

Обозначим

$$\Omega^i = \Delta c^i. \tag{18}$$

Так как $\det(m^i_k) \neq 0$, то изменением параметризации можно добиться, чтобы $m^i_k = \delta^i_k$, и привести уравнения (12) к виду

$$\nabla \hat a_{ij} = \hat b_{ij,k}\,\Omega^k, \tag{19}$$

а уравнения (4) записать в виде

$$d\Omega^i = \Omega^k \wedge \omega^i_k, \quad d\omega^j_i = \omega^k_i \wedge \omega^j_k + \Omega^k \wedge \omega^j_{ik}, \ldots$$

Формы Пфаффа

$$\tilde\omega^j_i = \omega^j_i - \Gamma^j_{ik}\Omega^k \tag{20}$$

являются формами связности, определяемой объектом $\{\Gamma^j_{ik}\}$ [3]. Дифференцируя (17) с учетом (19), получим

$$\nabla\Gamma^k_{ij} + \omega^k_{ij} = \Gamma^k_{ijm}\Omega^m. \tag{21}$$

Тогда тензор кривизны пространства V^Q_n запишется в виде

$$R^j_{ikh} = \Gamma^j_{ikh} - \Gamma^j_{ihk} + \Gamma^p_{ik}\Gamma^j_{hp} - \Gamma^p_{ih}\Gamma^j_{kp}. \tag{22}$$

Библиографический список

1. Дифференциально-геометрические структуры на расслоенных пространствах | О с т и а н у Н.М.; ВИНИТИ АН СССР.-М.,1973.-32с.-Библиогр.8 назв.-Рус.-Деп.в ВИНИТИ 23.04.73, № 5813-В.

2. О с т и а н у Н.М. Ступенчато-расслоенные пространства: Тр.Геометр.семинара | ВИНИТИ АН СССР.-М.,1973. Т.5.С.259-309.

3. Дифференциально - геометрические структуры на многообразиях | Л.Е.Е в т у ш и к и др.; Проблемы геометрии | ВИНИТИ АН СССР.-М.,1979.Т.9.С.1-247.

4. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий: Тр.Моск. математ. о-ва.-М.,1953,Т.2.С.275-382.

5. Л а п т е в Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства: Тр. IУ Всесоюзн.математического съезда.-М.,1964.Т.2.С.226-233.

5 Зак. 938